LA TEORIA DELLA RELATIVITÀ DI EINSTEIN
Presentazione

Il tema di questo anno a Mechrì è “Vicino, lontano”. La teoria della relatività (le due teorie, quella ristretta e quella generale), possono per molti aspetti corrispondervi. Non tanto per la banale osservazione che l’essere vicini o lontani nell’esperienza quotidiana è questione relativa alla situazione di chi giudica – per questo aspetto non ci sarebbe stato bisogno di una teoria fisica. Possiamo invece dire che la teoria in oggetto ci si presenta sia in una estrema lontananza che in una prossimità, a volte non avvertita.

La lontananza, intanto, è lontananza temporale: la relatività ristretta (TRR) si considera nata nel 1905 e quella generale (TRG) nel 1916, quindi più di un secolo fa. Ma entrambe le teorie sono considerate valide ancora oggi dalla comunità dei fisici, avendo superato moltissimi tentativi di confutazione: in questo senso possiamo dire che ci sono vicine, essendo teorie che vengono seguite quotidianamente, nei loro campi di applicazione, nel lavoro di ricerca di numerosi scienziati. Non solo; abbiamo a che fare con la relatività, anche se spesso non ne siamo consapevoli, quando ci capita di utilizzare alcuni dispositivi tecnologici: ad esempio i navigatori satellitari non potrebbero funzionare senza questa teoria.

Mi pare comunque che si possa dire che la lontananza della teoria riguardi soprattutto alcune conseguenze che contrastano duramente con il senso comune: per esempio la relatività delle dimensioni dei corpi e, soprattutto, del tempo e la curvatura dello spazio.

Recentemente sono state osservate delle “onde gravitazionali”, previste dalla TRG, onde provenienti da estreme lontananze, ma registrate qui, sul nostro pianeta, molto vicino a tutti noi.

L’intenzione di queste letture è quella di chiarire, per quanto possibile, i risultati più singolari della relatività einsteiniana, riguardo al loro senso, discutendo anche alcuni aspetti paradossali che, ad un primo sguardo, potrebbero metterne in discussione la validità. Per una comprensione piena delle teorie occorrerebbe avvalersi del formalismo matematico: cercheremo di farne un uso limitato, rimandando, per una trattazione più esauriente, a degli allegati e ad una bibliografia specialistica e non.

Le letture saranno condotte su testi diversi, di svariati autori; in primo luogo su scritti di Einstein, ma non solo.

In estrema sintesi possiamo dire che le novità portate dalla TRR sono l’abolizione dell’etere, e con esso dello spazio assoluto, l’abolizione del tempo assoluto, la costanza della velocità della luce nel vuoto, la costruzione di uno spazio-tempo quadridimensionale in cui vale una geometria pseudoeuclidea.

La TRG ci consegna uno spazio curvo nel quale vale una teoria della gravitazione diversa da quella newtoniana, la luce non ha più una velocità costante e la geometria di ogni punto dello spazio-tempo descrive anche l’azione gravitazionale: geometria e fisica diventano tutt’uno.

Equazioni di Maxwell

per il vuoto

In grassetto sono rappresentate le grandezze vettoriali

1 $\quad \text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ $\qquad$ 1' $\quad \text{div}\,\mathbf{H} = 0$

2 $\quad \text{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ $\qquad$ 2' $\quad \text{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho$

E campo elettrico **H** campo magnetico **j** = densità di corrente

ρ = densità di carica elettrica

c = velocità della luce nel vuoto

Equazioni di Maxwell

Ricordiamo che cosa esprimono le 4 equazioni di Maxwell, che scriveremo in presenza di cariche e in forma integrale.

1. La prima esprime la connessione fra il campo elettrico $\vec{E}$ e la distribuzione di carica, ossia sintetizza il fatto che le sorgenti del campo elettrico sono le cariche q. In altre parole, essa esprime la legge di Gauss secondo cui il flusso elettrico Φ uscente da una superficie chiusa Σ è proporzionale alla carica q che esso contiene, ovvero

$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = q$$

dove $d\vec{\sigma}$ è l'elemento infinitesimo di superficie.

2. La seconda esprime la legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday-Henry, secondo cui la forza elettromotrice indotta in un circuito chiuso l immerso in un campo magnetico variabile $\vec{B}$ è opposta alla variazione temporale del flusso magnetico ($\Theta = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}$), ossia

$$\oint_{l} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}$$

dove $d\vec{r}$ è l'elemento infinitesimo del circuito. In altre parole, esprime il fatto che un campo magnetico variabile genera un campo elettrico.

3. La terza esprime la legge di Gauss per il campo magnetico, ossia stabilisce che il flusso di un campo magnetico uscente da una superficie chiusa Σ è nullo in quanto non vi sono cariche magnetiche elementari analoghe alle cariche elettriche elementari, ovvero

$$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

4. La quarta, detta legge di Ampère-Maxwell, esprime il fatto che il campo magnetico è generato sia da correnti I sia da variazioni del campo elettrico; ovvero,

$$\oint_{l} \vec{B} \cdot d\vec{r} = I + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma}$$

Le equazioni di Maxwell in assenza di cariche si ottengono ponendo $q = 0$

e $I = 0$. Si può passare dalla forma integrale alla forma differenziale grazie al teorema della divergenza (per la prima e la terza equazione) e al teorema di Stokes (per la seconda e la quarta). In forma differenziale le equazioni connettono quantità definite in un intorno infinitesimo di un punto dello spazio. Ad esempio, la prima equazione in forma differenziale lega la distribuzione di carica in un punto con il campo elettrico in un intorno di quel punto.

Queste appena scritte sono le equazioni di Maxwell relative a un sistema K. Potremmo dimostrare che se passassimo, tramite le trasformazioni di Galilei, a scriverle in K′, in moto rispetto a K con velocità $V=V_x$, si perderebbe la loro covarianza. Tralasciamo comunque la dimostrazione formale dal momento che la trasformazione galileiana degli operatori differenziali *div* e *rot*, nonché dei campi, comporta calcoli abbastanza lunghi.

D'altro canto, una conclusione del genere è intuitivamente afferrabile riflettendo sul fatto che sono proprio le equazioni di Maxwell che danno teoricamente il valore della velocità della luce. Per cui se in K la velocità della luce è c, sappiamo che, usando le trasformazioni di Galilei, in K′ essa sarà $c - V$. Per cui in K′, le equazioni di Maxwell devono essere in qualche modo diverse dovendo rendere conto di una velocità della luce diversa.

Vi è perciò un'asimmetria fra leggi della meccanica e leggi dell'elettromagnetismo: le prime sono covarianti per trasformazioni di Galilei, le seconde non lo sono. Tale asimmetria verrà sanata dalla relatività speciale, grazie all'introduzione di nuove trasformazioni di coordinate e di nuovi concetti all'interno della meccanica. Vedremo, infatti, che i concetti di spazio, tempo ed energia subiranno una drastica modifica.

Equazioni di Maxwell scritte in forma differenziale (in grassetto le grandezze vettoriali) e in assenza di cariche

$$div\ \boldsymbol{E} = 0$$

$$rot\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

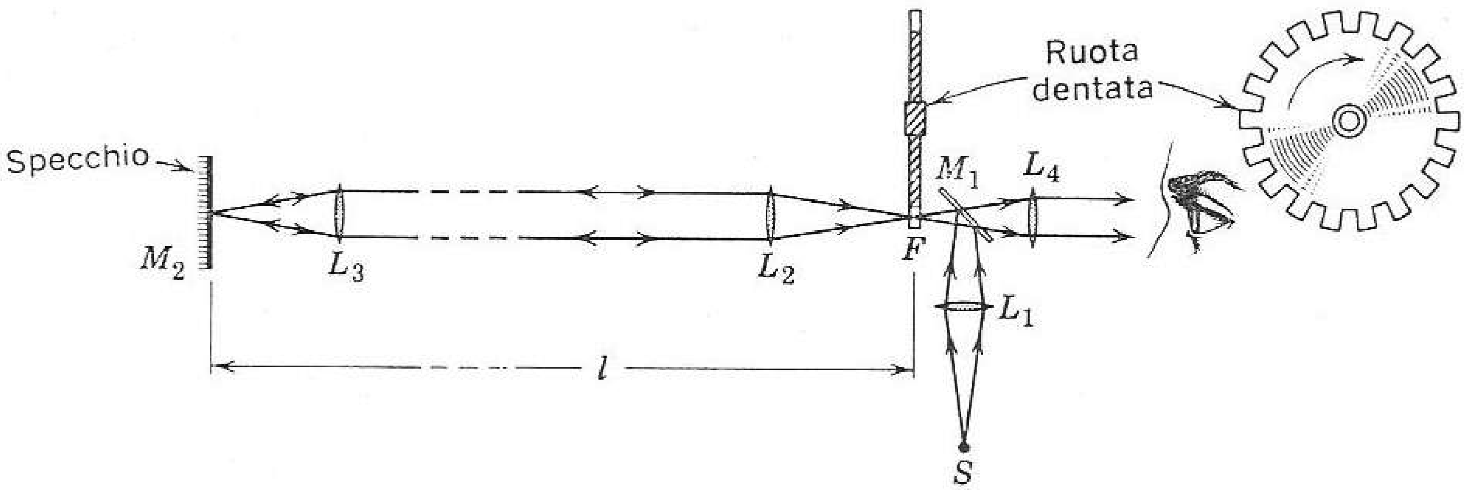
$$div\ \boldsymbol{B} = 0$$

$$rot\ \boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

E vettore campo elettrico
B vettore campo magnetico
t tempo
∂ operatore differenziale

Dalle equazioni di Maxwell, considerando la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del vuoto, rispettivamente ε_0 e μ_0, si ricava direttamente la velocità della luce:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$



Specchio
M_2
L_3
L_2
F
M_1
L_4
L_1
S
l
Ruota
dentata

a. Determinazione della velocità della luce in base alle osservazioni dalla Terra delle eclissi dei satelliti di Giove. Metodo di Romer. Il pianeta Giove ha 12 satelliti conosciuti. Essi vengono osservati dalla Terra in prossimità di Giove, o si nascondono nella sua ombra. Le osservazioni astronomiche dei satelliti di Giove mostrano che l'intervallo di tempo medio fra due eclissi consecutive di uno dei sattelliti dipende dalla distanza alla quale si trovano la Terra e Giove durante le osservazioni.

Il metodo di Romer (1676), basato su queste osservazioni, può essere illustrato con la fig. 296. Supponiamo che in un certo istante di tempo la Terra (T_1) e Giove (G_1) si trovino in *opposizione* e che in questo istante uno dei satelliti di Giove osservato dalla Terra sparisca nell'ombra del pianeta (il satellite non è rappresentato nella figura). Allora, indicando con R ed r rispettivamente i raggi delle orbite di Giove e della Terra e con c la velocità della luce nel sistema di coordinate S legato al Sole, l'ingresso del satellite nel cono d'ombra di Giove sarà registrato sulla Terra con un ritardo di $(R-r)/c$ secondi rispetto alla realizzazione dell'evento nel sistema temporale legato a Giove.

Dopo che sarà passata una frazione di anno pari a 0,545, la Terra (T_2) e Giove (G_2) verranno separati dal Sole. Se in quel periodo si verificherà un'altra eclisse dello stesso satellite di Giove, la sua registrazione sulla Terra avverrà con un ritardo di $(R+r)/c$ secondi. Quindi, se il periodo di rivoluzione del satellite attorno a Giove vale t, allora l'intervallo di tempo t_1 trascorso fra la prima e l'ennesima eclisse osservate dalla Terra è

$$t_1=(n-1)\,t+\frac{R+r}{c}-\frac{R-r}{c}=(n-1)\,t+\frac{2r}{c}.$$

Dopo che sarà trascorsa un'altra frazione di anno pari a 0,545, la Terra (T_3) e Giove (G_3) si troveranno di nuovo in *opposizione*. In questo periodo di tempo si sono verificate $(n-1)$ rivoluzioni del satellite attorno a Giove e $(n-1)$ eclissi, di cui la prima nel momento in cui la Terra e Giove occupavano le posizioni T_2 e G_2, e l'ultima nel momento in cui i pianeti occupano le posizioni T_3 e G_3. La prima eclisse è stata osservata dalla Terra con un ritardo di $(R+r)/c$ secondi e l'ultima con un ritardo $(R-r)/c$ rispetto ai momenti di entrata del satellite nell'ombra di Giove. Quindi, in questo caso si ha

$$t_2=(n-1)\,t-\frac{R+r}{c}+\frac{R-r}{c}=$$
$$=(n-1)\,t-\frac{2r}{c}.$$

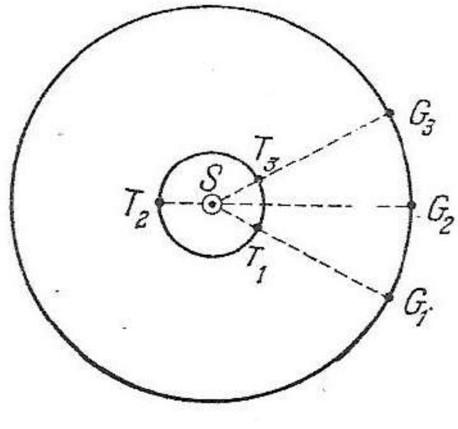


Fig. 296. *Metodo di Romer di determinazione della velocità della luce.*

Romer misurò gli intervalli di tempo t_1 e t_2 e stabilì che $t_1-t_2=1980$ secondi. Ma dalle formule dedotte sopra risulta che $t_1-t_2=4r/c$, pertanto $c=4r/1980$ m/s. Ponendo la distanza media r fra la Terra e il Sole uguale a $150\cdot10^6$ km, troviamo il seguente valore della velocità della luce:

$c=301\cdot10^6$ m/s.

Riserratevi con qualche amico nella maggior stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piedi giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma; voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima; né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso prua e voi verso poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le gocciole cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con più fatica noteranno verso la precedente che verso la sussequente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino verso la parete che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria, saranno state separate. (Galileo Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*).

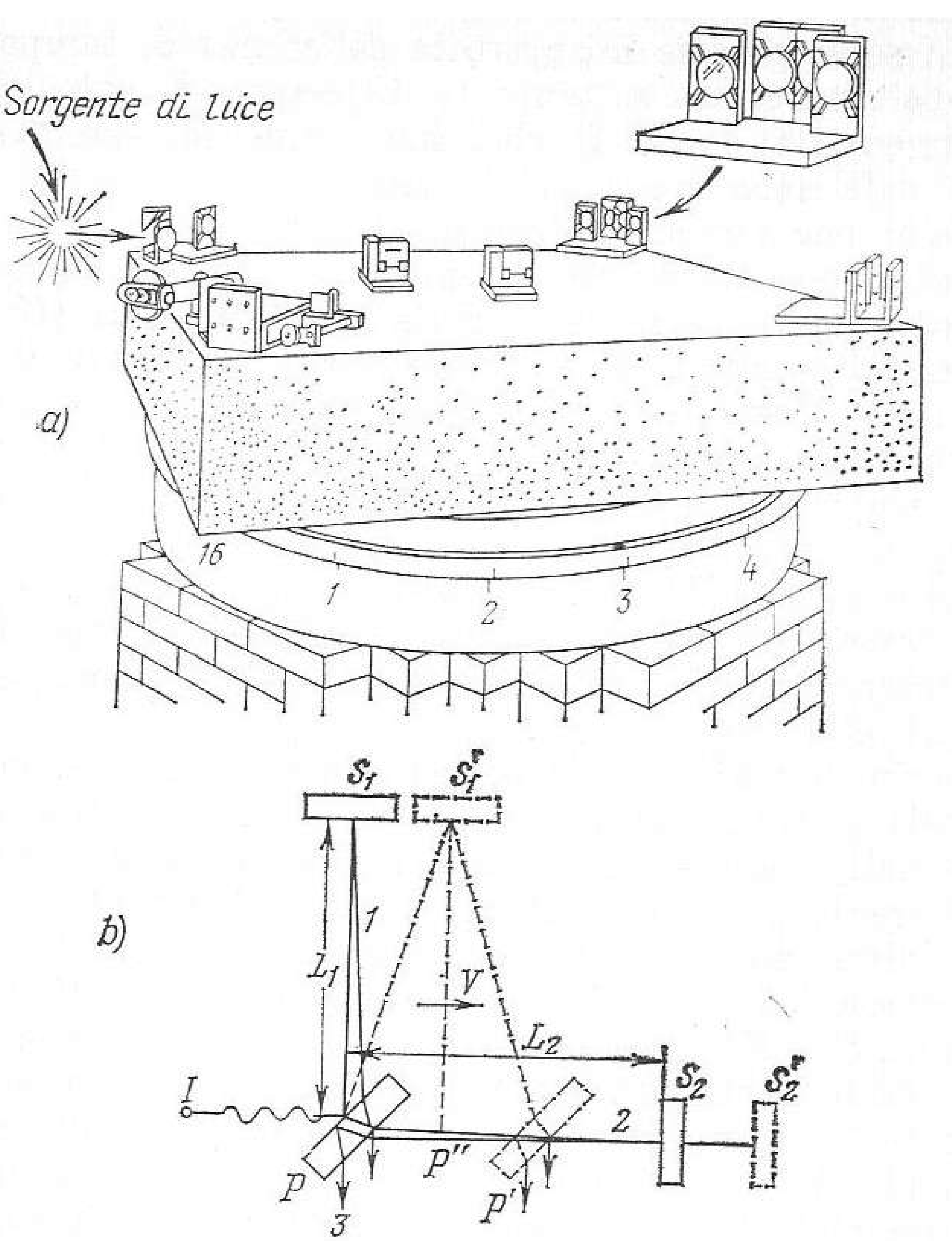


Fig. S.5. *a*) Veduta generale dell'interferometro di Michelson. *b*) Rappresentazione schematica dell'esperimento di Michelson. Un raggio di luce dalla sorgente *I* è suddiviso dalla lastra semitrasparente *P* in due raggi, *1* e *2*, che viaggiano lungo e perpendicolarmente al moto orbitale della Terra. La velocità del moto orbitale della Terra è indicata dalla freccia e dalla lettera *V*. I raggi *1* e *2* sono riflessi rispettivamente dagli specchi S_1 e S_2 e ritornano alla lastra *P*. Dopo la riflessione e la rifrazione, i due raggi vanno nella direzione *3*, che è la direzione in cui vengono osservate le frange d'interferenza. L'elemento decisivo dell'esperimento consiste nel ruotare l'intero apparato di 90°; il raggio *1* ora viaggia nella direzione del moto della Terra, ed il raggio *2* perpendicolarmente a questa direzione. Se la luce si propagasse attraverso l'etere stazionario, la differenza di cammino ottico dei raggi *1* e *2* cambierebbe ed il disegno di interferenza osservato nella direzione *3* dovrebbe cambiare (le frange si dovrebbero spostare). L'esperimento, comunque, non mise in evidenza alcuno spostamento delle frange d'interferenza.

2. È l'anno 1905: un giovane impiegato dell'Ufficio Brevetti di Berna invia alla rivista «Annalen der Physik» una serie di articoli di portata eccezionale. Gli scritti einsteiniani di quello che passò alla storia come *annus mirabilis* furono effettivamente le basi per una ristrutturazione radicale della conoscenza del mondo. Basti ricordare alcune date: il 17 marzo vedeva la conclusione di un saggio sui quanti di luce; in data 11 maggio la rivista riceveva una prima memoria sui moti browniani, cui facevano seguito (il 30 giugno, il 27 settembre e il 19 dicembre) il fondamentale scritto sull'elettrodinamica dei corpi in movimento, che segna la nascita della relatività ristretta, e due lavori rispettivamente dedicati al rapporto tra massa ed energia e alla generalizzazione della teoria sui moti browniani. Nell'aprile dello stesso anno, poi, Einstein terminava la stesura di una tesi di dottorato sulla valutazione delle dimensioni molecolari.

(Dall'introduzione di Enrico Bellone alle opere scelte di A. Einstein)

Trasformazione delle coordinate nel passaggio da un sistema inerziale K ad un altro sistema inerziale K' che si muova con velocità *V* nel verso positivo dell'asse x del sistema K. Con *c* è indicata la velocità della luce.

TRASFORMAZIONI DI GALILEO	TRASFORMAZIONI DI LORENTZ
$x' = x - Vt$	$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$
$y' = y$	$y' = y$
$z' = z$	$z' = z$
$t' = t$	$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$

L'elettrodinamica dei corpi in movimento (1905)

È noto che l'elettrodinamica di Maxwell – così come essa è oggi comunemente intesa – conduce, nelle sue applicazioni a corpi in movimento, ad asimmetrie che non sembrano conformi ai fenomeni. Si pensi ad esempio alle interazioni elettrodinamiche tra un magnete e un conduttore. Laddove la concezione usuale contempla due casi nettamente distinti, a seconda di quale dei due corpi sia in movimento, il fenomeno osservabile dipende, in questo caso, solo dal moto relativo di magnete e conduttore. Infatti, se si muove il magnete e rimane stazionario il conduttore, si produce, nell'intorno del magnete, un campo elettrico con una ben determinata energia, il quale genera una corrente nei luoghi ove si trovano parti del conduttore. Se viceversa il magnete resta stazionario e si muove il conduttore, non nasce, nell'intorno del magnete, alcun campo elettrico; tuttavia si osserva, nel conduttore, una forza elettromotrice, alla quale non corrisponde, di per sé, un'energia, ma che – supponendo che il moto relativo sia lo stesso nei due casi – genera correnti elettriche della stessa intensità di quelle prodotte dalle forze elettriche nel caso precedente, e che hanno lo stesso percorso.

Esempi come questo, come pure i tentativi falliti di individuare un qualche movimento della Terra relativamente al «mezzo luminifero» suggeriscono che i fenomeni elettrodinamici, al pari di quelli meccanici, non possiedono proprietà corrispondenti all'idea di quiete assoluta. Essi suggeriscono piuttosto che, come già è stato mostrato in un'approssimazione al primo ordine, per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni della meccanica varranno anche le stesse leggi elettrodinamiche e ottiche. Eleveremo questa congettura (il contenuto della quale verrà detto, in quanto segue, «principio di relatività») al rango di postulato; supporremo inoltre – un postulato, questo, solo apparentemente incompatibile col precedente – che la luce, nello spazio vuoto, si propaghi sempre con una velocità determinata, *c*, che non dipende dallo stato di moto del corpo che la emette.[1] Questi due postulati bastano per giungere a una teoria elettrodinamica dei corpi in movimento, semplice e coerente, fondata sulla teoria di Maxwell per i corpi stazionari. L'introduzione di un «etere luminifero» si manifesterà superflua, tanto più che la concezione che qui illustreremo non avrà bisogno di uno «spazio assolutamente stazionario» corredato di particolari proprietà, né di un vettore velocità assegnato a un punto dello spazio vuoto nel quale abbiano luogo processi elettromagnetici.

La nostra teoria si basa – come tutta l'elettrodinamica – sulla cinematica del corpo rigido: infatti gli enunciati di una qualsiasi teoria di questo tipo riguardano i rapporti fra corpi rigidi (sistemi di coordinate), orologi e processi elettromagnetici. La non sufficiente considerazione di questa circostanza è la radice delle difficoltà con le quali si scontra, oggi, l'elettrodinamica dei corpi in moto.

Lorentz, Poincaré, Einstein

Nel 1895 Lorentz aveva adottato l'opinione (in seguito confermata) che le forze che tengono insieme la materia sono di natura elettromagnetica, cosicché il comportamento dei corpi materiali reali dovrebbe soddisfare le leggi derivate dalle equazioni di Maxwell. Un'implicazione di ciò risultò essere il fatto che un corpo in movimento con una velocità paragonabile a quella della luce dovrebbe contrarsi leggermente nella direzione del moto (la contrazione di Fitzgerald-Lorentz). Lorentz si era servito di questa contrazione per spiegare un risultato sperimentale sconcertante ottenuto da Michelson e Morley nel 1887, il quale sembrava indicare che non si potessero usare i fenomeni elettromagnetici per determinare un sistema di riferimento «assoluto» in quiete. (l'esperimento di Michelson e Morley mostrò che, contrariamente alle attese, la velocità apparente della luce sulla superficie della Terra non risente del moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole). La materia si comporta sempre in modo tale che il suo moto (rettilineo uniforme) non possa essere rilevato su scala locale? Questa fu la soluzione *approssimativa* di Lorentz; egli era limitato inoltre a una teoria specifica della materia nella quale non si riteneva fossero significative altre forze oltre a quelle elettromagnetiche. Poincaré, eminente matematico, riuscì a mostrare (nel 1905) che esiste un modo di comportamento *esatto* della materia secondo il principio di relatività sottostante alle equazioni di Maxwell, cosicché un moto rettilineo uniforme non può essere affatto rilevato a livello locale. Egli riuscì a comprendere anche molte implicazioni fisiche di questo principio (compresa la «relatività della simultaneità» […]). Pare però che Poincaré abbia considerato la relatività solo come *una* possibilità, e che non abbia condiviso la convinzione di Einstein che un qualche principio di relatività *debba* effettivamente essere valido.
(da Roger Penrose, *La mente nuova dell'imperatore*, Rizzoli 1992, pp. 252-253)

Hendrik Lorentz

«Secondo Einstein, non ha senso parlare di moto rispetto all'etere. Allo stesso modo Einstein nega l'esistenza della simultaneità assoluta. È certo sorprendente che questi concetti relativistici, anche quelli riguardanti il tempo, siano stati accettati così rapidamente. La loro accettazione è in primo luogo un problema di carattere epistemologico (…) È certo, tuttavia, che dipende in larga misura dal modo in cui si è abituati a pensare il fatto di essere attratti dall'una piuttosto che dall'altra interpretazione. Per quanto riguarda chi vi parla, ho una certa preferenza per le interpretazioni precedenti, secondo le quali l'etere possiede almeno una qualche esistenza reale, lo spazio e il tempo possono essere nettamente separati, e si può parlare di simultaneità senza ulteriori specificazioni. Quanto a quest'ultimo punto, si può forse fare appello alla nostra capacità di immaginare velocità arbitrariamente grandi: in tal modo si giunge assai vicino al concetto di simultaneità assoluta. Infine, si dovrebbe rilevare che l'asserzione, alquanto temeraria, che non sia mai possibile osservare velocità superiori a quelle della luce, contiene una restrizione ipotetica di ciò che ci è accessibile, [restrizione] che non si può accettare senza qualche riserva». (*Da una conferenza tenuta da Lorentz alla Fondazione Teyler a Harlem nel 1913*).

Riguardo a queste asserzioni di Lorentz, Abraham Pais scrive: «È chiaro, al di là di qualsiasi dubbio, che l'immaginazione di Lorentz era l'immaginazione classica. Se la luce si propaga alla velocità di c km/s, non c'è alcuna difficoltà a immaginare una velocità pari a c + 1 km/s. La concezione classica asserisce ciò che la concezione relativistica nega, cioè che una velocità che può essere immaginata dal punto di vista matematico è di necessità raggiungibile fisicamente». (A. Pais, *Sottile è il Signore…*Bollati Boringhieri 2016, p.182).

Riconoscendo qualche anno dopo i meriti di Einstein nella creazione della teoria della relatività, Lorentz scrisse, in una nota aggiunta alla seconda edizione di un ciclo di conferenze tenute alla Columbia University: «La ragione principale del mio insuccesso [nella scoperta della relatività ristretta] è stato il mio attaccamento all'idea che solo la variabile t possa essere considerata come tempo vero, e che il tempo locale t', da me introdotto [tempo determinato dalle trasformazioni di Lorentz], non debba essere ritenuto nulla più di una grandezza matematica ausiliaria».

Poincaré

Da *Sottile è il Signore…*, di A. Pais, p. 183.
Poincaré e la terza ipotesi. Nell'aprile 1909 Poincaré tenne una serie di lezioni a Gottinga. Nell'ultima, intitolata *La mécanique nouvelle*, trattò i problemi attinenti alla relatività. A prima vista, il lettore di questo testo può stupirsi di non trovare alcun cenno ad Einstein, la cui teoria aveva allora già quattro anni. Ma a un'analisi più attenta, si scoprirà che questa omissione è giustificata: Poincaré infatti non parlava della teoria di Einstein. La nuova meccanica, disse Poincaré, si basa si tre ipotesi. La prima è che i corpi non possono raggiungere velocità superiori a quella della luce. La seconda è che (in linguaggio moderno) le leggi della fisica debbano esser identiche in tutti i riferimenti inerziali. E fin qui tutto bene. Poi Poincaré introduce una terza ipotesi: "Occorre fare un'ulteriore ipotesi, ben più sorprendente, ben più difficile da accettare, e che contrasta in modo stridente con ciò a cui siamo abituati. Un corpo in moto traslatorio subisce una deformazione nella direzione in cui si sposta (…) Per quanto strana possa apparirci, si deve ammettere che la terza ipotesi è perfettamente verificata".
È evidente che, ancora nel 1909, Poincaré non aveva compreso che la contrazione dei regoli è una conseguenza dei due postulati di Einstein. Poincaré dunque non comprese uno dei punti fondamentali della relatività ristretta.

Louis de Broglie:
«Ancora un poco ed Henri Poincaré, piuttosto che Albert Einstein, sarebbe stato il primo ad enunciare la teoria della relatività in tutta la sua generalità, dando così alla scienza francese l'onore della scoperta… Comunque, Poincaré mancò di fare il passo definitivo, lasciando ad Einstein l'onore di comprendere tutti i corollari del principio di relatività e in particolare, mediante una profonda analisi delle misure di spazio e tempo, di stabilire la reale natura fisica della connessione fra spazio e tempo stabilita dal principio di relatività. Perché Poincaré non fu in grado di portare fino in fondo le sue conclusioni? Senza dubbio egli possedeva una mente estremamente critica, forse perché, come scienziato, era prima di tutto e soprattutto un matematico. Come detto prima, Poincaré adottò una posizione alquanto scettica rispetto alle teorie fisiche, considerando che esiste un numero infinito di punti di vista logicamente equivalenti e di visioni della realtà tra cui gli scienziati in base a considerazioni di comodità ne scelgono una sola. Tale nominalismo gli impedì forse di capire che tra tutte le teorie logicamente possibili alcune erano più vicine alla realtà fisica, o almeno erano in buon accordo con l'intuizione dei fisici ed erano perciò più utili. È per questo che il giovane Einstein, che aveva soltanto 25 anni e le cui conoscenze matematiche non erano nemmeno comparabili con quelle del grande scienziato francese, fu capace di trovare prima di Poincaré la sintesi che rimosse tutte le difficoltà, usando e giustificando tutti i tentativi dei suoi predecessori. Questo colpo decisivo fu opera di un potente intelletto guidato da una profonda intuizione sulla natura della realtà fisica.

Il brillante successo di Einstein non deve farci dimenticare che il problema della relatività è stato analizzato per primo e in modo profondo dalla vivida mente di Poincaré e che proprio Poincaré ha dato un contributo fondamentale alla soluzione futura del problema. Einstein non avrebbe avuto successo senza Lorentz e Poincaré».

(L. de Broglie, *Henri Poincaré, le teorie della fisica*, discorso nel centenario della nascita di Poincaré 1854-1954, Parigi 1955)

LORENTZ, POINCARÉ, EINSTEIN

Lorentz non considerava il tempo *t'* come il tempo del riferimento in moto; egli lo chiamò tempo locale e pensò che aveva a che fare «semplicemente con grandezze ausiliarie introdotte con l'aiuto di espedienti matematici. In particolare, la variabile *t'* non poteva chiamarsi "tempo" nello stesso senso della variabile *t*».
Nel 1915 scrisse: «La ragione principale del mio errore era stata di considerare sempre soltanto la variabile *t* come tempo vero, mentre il mio tempo locale *t'* doveva essere considerato come una grandezza matematica ausiliare. Nella teoria di Einstein, d'altra parte, *t'* gioca lo stesso ruolo di *t*». Nel 1927, un anno prima della sua morte, Lorentz chiarì ciò ancora più precisamente: «Per me c'era soltanto un tempo vero. Io consideravo la mia trasformazione temporale come una semplice ipotesi euristica di lavoro. Dunque, la teoria della relatività praticamente è lavoro esclusivo di Einstein».

Lorentz e Poincaré consideravano [il principio di relatività] semplicemente come un'asserzione sull'impossibilità di osservare il moto uniforme di un corpo rispetto all'etere. Non si richiedevano particolari sforzi per procedere da questo a considerare equivalenti tutti i riferimenti inerziali (…), purché le trasformazioni di Lorentz siano considerate come il passaggio ad un sistema di riferimento in moto.

Poincaré fu meno chiaro. Nei suoi articoli del 1905-1906 egli affermò semplicemente che le equazioni dell'elettrodinamica «possono essere soggette all'importante trasformazione scoperta da Lorentz, che spiega perché non è possibile alcuna dimostrazione sperimentale del moto assoluto della Terra». «I risultati che ho ottenuto sono in accordo con quelli di Lorentz nei punti principali. Io cercai soltanto di completarli e modificarli in certi dettagli».

D'altra parte alcuni commenti di Poincaré nei primi lavori, articoli e pubblicazioni suonano quasi profetici. Vi si tratta della necessità di definire il concetto di simultaneità e della possibilità di usare allo scopo segnali luminosi, del principio di relatività. Comunque egli non sviluppò queste considerazioni e nei suoi lavori del 1905-1906 seguì Lorentz. (…) Essi si sforzarono di dimostrare e dimostrarono per quali ipotesi il moto rettilineo di un corpo rispetto all'etere non è misurabile. Ma Einstein nel suo lavoro del 1905 rovesciò, potremmo dire, l'intera questione, mostrando che, una volta accettato il principio di relatività e sincronizzati gli orologi con l'aiuto della luce (ed anche postulando che la velocità della luce non dipende dal moto della sorgente), non sono necessarie ulteriori ipotesi; esse permettono di ottenere la contrazione dei righelli in moto ed il ritardo del ritmo di un orologio in moto.

(Dall'articolo di V. L. Ginzburg, *Chi ha sviluppato la teoria della relatività e come?*)

2. IL POSTULATO DELLA RELATIVITÀ

Il fallimento di molti tentativi [1,*] intesi a stabilire un influsso sui fenomeni del movimento della Terra mediante misure eseguite su di essa permette di concludere con ogni verosimiglianza, e si può anzi dire con certezza, che i fenomeni che avvengono in un sistema sono indipendenti dal moto traslatorio di questo. Piú precisamente: esiste un insieme triplamente infinito [2] di sistemi di riferimento in moto relativo rettilineo e uniforme, nei quali i fenomeni si sviluppano secondo leggi perfettamente identiche. Nel seguito chiameremo questi sistemi galileiani, come ha fatto Einstein, poiché per essi vale la legge di inerzia di Galileo. Non è soddisfacente che non *tutti* i sistemi vengano considerati equivalenti o almeno che non sia data una giustificazione per questa scelta di un particolare insieme di sistemi. A questo porrà rimedio la teoria della relatività *generale* (cap. 4). Per il momento dobbiamo limitarci ai sistemi di riferimento galileiani, cioè alla relatività dei moti traslatori uniformi.

Mediante il postulato di relatività, l'etere come *sostanza*

[1] Accanto ai lavori citati nella nota 1 di p. 12 ricordiamo:

La ripetizione dell'esperienza di Michelson di E. W. MORLEY e D. C. MILLER, Phil. Mag. 8, 753 (1904), e 9, 680 (1905). Si veda anche la discussione di J. LUROTH, München Ber. 7 (1909); E. KOHL, Ann. Phys. 28, 259, 662 (1909); M. VON LAUE, ibid. 33, 156 (1910).

Alcuni tentativi di determinare una doppia rifrazione causata dal moto della Terra, D. B. BRACE, Phil. Mag. 7, 317 (1904), e 10, 71 (1905); «Boltzmann-Festschrift», 576 (1907); e un tentativo di F. T. TROUTON e A. O. RANKINE, Proc. roy. Soc. 8, 420 (1908), inteso a mettere in evidenza una dipendenza della resistenza elettrica di un filo dall'orientamento di questo rispetto al moto della Terra. Si veda anche la rassegna di J. LAUB, Jahrb. Rad. El. 7, 405 (1910), sui fondamenti sperimentali del principio di relatività.

* R. J. KENNEDY e E. M. THORNDIKE, Phys. Rev. 42, 400 (1932), hanno introdotto un'importante variante nell'esperimento di Michelson, prendendo i bracci dell'interferometro di lunghezza considerevolmente diversa. Il risultato negativo dell'esperimento esclude la possibilità di una dipendenza dalla velocità della Terra del tempo necessario alla luce per percorrere un qualunque cammino chiuso in un laboratorio terrestre.

La discussione teorica di questo esperimento è stata fatta da H. P. ROBERTSON, Rev. mod. Phys. 21, 378 (1949).

[2] Si prescinde qui dal caso banale del cambiamento di origine e dello spostamento degli assi.

viene eliminato dalle teorie fisiche, poiché non ha piú alcun senso parlare di stato di quiete o di moto rispetto ad esso, se questi stati non possono, per principio, essere riconosciuti mediante osservazioni.

Oggi tutto questo non ci stupisce molto, dal momento che si è già cominciato con successo a spiegare le proprietà elastiche della materia in termini di forze elettriche, e sarebbe quindi un controsenso voler interpretare i fenomeni elettromagnetici tramite le proprietà elastiche di un ipotetico mezzo [1]. La rappresentazione meccanica dell'etere era già diventata superflua e ingombrante quando la teoria elastica della luce era stata sostituita con quella elettromagnetica. In quest'ultima la sostanza dell'etere era rimasta sempre una cosa del tutto estranea. Da Einstein [2] è stato proposto che sotto il concetto di etere non vada intesa nessuna sostanza, bensí *l'insieme di quelle grandezze fisiche di stato, che devono venire attribuite allo spazio vuoto di materia.* In questo senso lato naturalmente esiste un etere, solo che esso non ha proprietà meccaniche, cioè a quelle grandezze di stato dello spazio vuoto non può venire associata una coordinata di posizione o una velocità.

Potrebbe sembrare che il postulato di relatività, una volta messo da parte l'etere, sia immediatamente evidente. Una riflessione piú attenta mostra però che questo non è il caso [3]. Noi non siamo evidentemente in grado di impartire una traslazione a tutto l'universo e di vedere se i fenomeni subiscano con ciò una modificazione. Il nostro asserto ha un senso euristico e fisico solo se lo si pensa valido per ogni sistema isolato. Ma quando è isolato un sistema? È sufficiente che tutte le masse siano sufficientemente lontane? [4] La risposta fornita dall'esperienza è la seguente: è sufficiente per i moti

[1] Su questo punto si è espresso M. BORN, Naturwiss. 7, 136 (1919).

[2] A. EINSTEIN, *Aether und Relativitätstheorie* (Berlino 1920). Discorso tenuto a Leida.

[3] Cfr. A. EINSTEIN, Ann. Phys. 38, 1059 (1912).

[4] Sulla necessità di tener conto delle masse distanti anche nella teoria della relatività ristretta si è espresso altrove H. Holst (cfr. nota p. 32).

Relatività della simultaneità

Da A. Einstein, *Relatività: esposizione divulgativa*

senso suddetto) le medesime posizioni. In queste condizioni noi intendiamo per «tempo» di un evento la lettura (posizione delle lancette) di quello fra tali orologi che si trova nell'immediata vicinanza (spaziale) dell'evento in esame. In tal modo viene associato a ogni evento un valore del tempo per principio suscettibile di osservazione.

Questa convenzione contiene un'ulteriore ipotesi fisica, la cui validità non potrà venir posta in dubbio salvo che sulla base di una prova empirica del contrario. Si è supposto che tutti quegli orologi camminino con *lo stesso ritmo* se sono di costruzione identica. Più esattamente diremo: quando due orologi, collocati fermi in luoghi differenti di uno stesso corpo di riferimento, vengono regolati in maniera che una posizione *particolare* delle lancette di uno degli orologi sia *simultanea* (nel senso suddetto) con la *stessa* posizione delle lancette dell'altro orologio, allora le «posizioni» identiche delle lancette saranno sempre simultanee (nel senso della definizione più sopra riferita).

9. *La relatività della simultaneità*

Le nostre considerazioni sono state finora svolte rispetto a un particolare corpo di riferimento, a cui abbiamo dato il nome di «banchina ferroviaria». Supponiamo che un treno molto lungo viaggi sulle rotaie con la velocità costante v e nella direzione indicata dalla figura 1. Le persone che viaggiano su questo treno useranno vantaggiosamente il treno come corpo rigido di riferimento (sistema di coordinate); esse considerano tutti gli eventi in riferimento al treno. Ogni evento, poi, che ha luogo lungo la linea ferroviaria ha pure luogo in un determinato punto del treno. Anche la definizione di simultaneità può venir data rispetto al

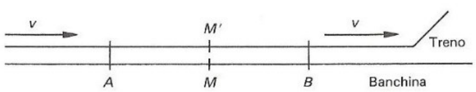


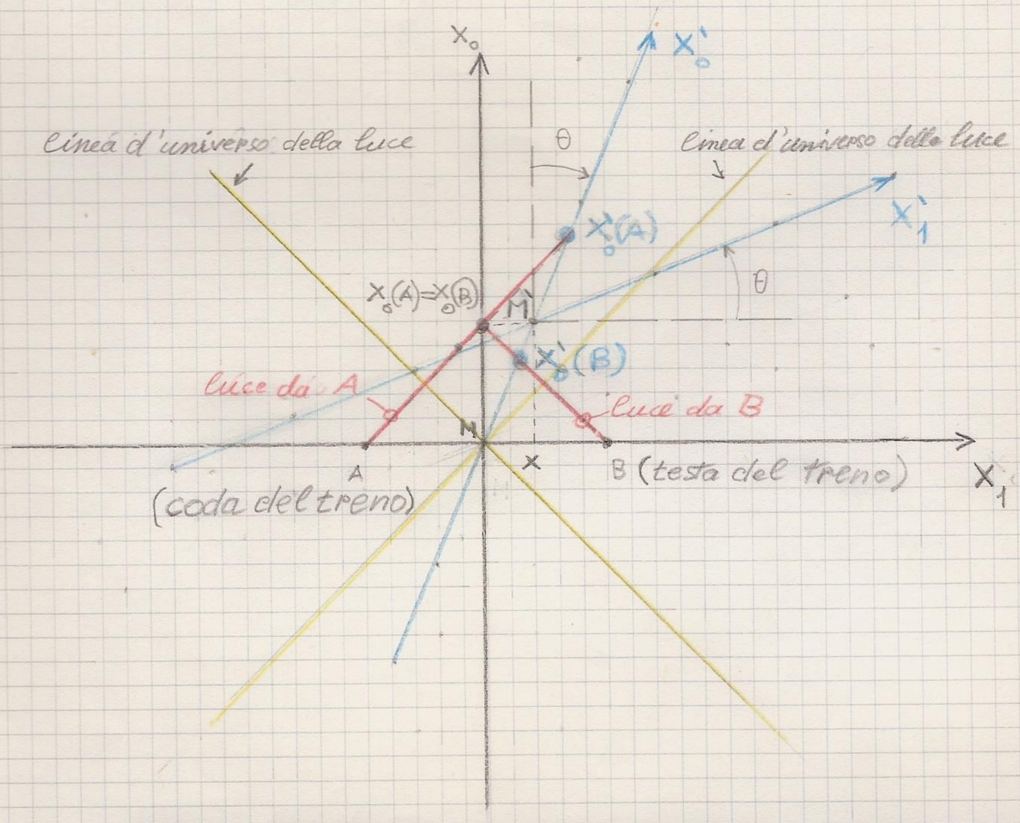
Figura 1

treno nello stesso preciso modo in cui venne data rispetto alla banchina. Ora però si presenta, come conseguenza naturale, la seguente domanda: due eventi (per esempio i due colpi di fulmine A e B) che sono simultanei rispetto alla banchina ferroviaria saranno tali anche rispetto al treno? Mostreremo subito che la risposta deve essere negativa.

Allorché diciamo che i colpi di fulmine A e B sono simultanei rispetto alla banchina intendiamo: i raggi di luce provenienti dai punti A e B dove cade il fulmine si incontrano l'uno con l'altro nel punto medio M dell'intervallo AB della banchina. Ma gli eventi A e B corrispondono anche alle posizioni A e B sul treno. Sia M' il punto medio dell'intervallo AB sul treno in moto. Proprio quando si verificano i bagliori del fulmine,[8] questo punto M' coincide naturalmente con il punto M, ma esso si muove verso la destra del disegno con la velocità v del treno. Se un osservatore seduto in treno nella posizione M' non possedesse questa velocità, allora egli rimarrebbe permanentemente in M e i raggi di luce emessi dai bagliori del fulmine A e B lo raggiungerebbero simultaneamente, vale a dire s'incontrerebbero proprio dove egli è situato. Tuttavia nella realtà (considerata con riferimento alla banchina ferroviaria), egli si muove rapidamente verso il raggio di luce che proviene da B, mentre corre avanti al raggio di luce che proviene da A. Pertanto l'osservatore vedrà il raggio di luce emesso da B prima di vedere quello emesso da A. Gli osservatori che assumono il treno come loro corpo di riferimento debbono perciò giungere alla conclusione che il lampo di luce B ha avuto luogo prima del lampo di luce A. Perveniamo così al seguente importante risultato: gli eventi che sono simultanei rispetto alla banchina non sono simultanei rispetto al treno e viceversa (relatività della simultaneità); ogni corpo di riferimento (sistema di coordinate) ha il suo proprio tempo particolare: un'attribuzione di tempo è fornita di significato solo quando ci venga detto a quale corpo di riferimento tale attribuzione si riferisce.

[8] Giudicando dalla banchina.

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLA RELATIVITA' DELLA SIMULTANEITA'



Con $x_0 = ct$ e $x'_0 = ct'$ sono indicate le coordinate "temporali" rispettivamente del sistema della banchina e del treno; con x_1 e x'_1, le coordinate spaziali.
I lampi di luce giungono simultaneamente a M: $x_0(A) = x_0(B)$ quando M' si trova nel punto x del sistema della banchina. Il lampo proveniente da B raggiunge M' al tempo $x'_0(B)$ del sistema del treno prima che M' giunga al punto x del sistema della banchina, mentre il lampo che proviene da A lo raggiunge al tempo $x'(A)$ successivo.

La rappresentazione grafica è realizzata in M^2 (spazio di Minkowski a due dimensioni, una spaziale e una temporale); l'inclinazione degli assi del sistema treno, rispetto a quella del sistema banchina è data dall'angolo $\theta = \operatorname{arctg} \frac{v}{c}$. Le due linee d'universo della luce rappresentano due raggi luminosi propagantisi nei due sensi dell'asse X_1 e passanti al tempo t = t' = 0 per il punto M: sono le bisettrici dei quadranti del sistema della banchina; tutti i raggi luminosi, come quelli uscenti da A e da B, sono rappresentati da rette parallele a queste due linee. Il punto M' del sistema treno si trovava a coincidere con M al tempo t' = t = 0 e si è spostato lungo l'asse X_1 fino al punto $x = vx_0(A) = vx_0(B)$.

1. *Definizione di simultaneità*

Sia dato un sistema di coordinate nel quale valgano le equazioni della meccanica newtoniana.[2] Per distinguerlo da altri che verranno introdotti in seguito e per rendere più precisa la nostra rappresentazione, lo denomineremo «sistema stazionario».

Consideriamo un punto materiale in quiete in tale sistema; la sua posizione, relativamente ad esso, può venir determinata con un campione di lunghezza rigido, impiegando le regole della geometria euclidea, ed essere espressa in coordinate cartesiane.

[1] [Nell'originale di Einstein la velocità della luce nel vuoto è indicata con *V*.]

[2] È cioè in prima approssimazione. [Nota aggiunta da Einstein nelle versioni posteriori a quella del 1905.]

Per descrivere il *moto* di un punto materiale si danno i valori delle coordinate in funzione del tempo. Si tenga presente che una tale descrizione matematica non ha significato fisico se prima non si è chiarito che cosa si intende per «tempo». Noi dobbiamo considerare che tutti i nostri giudizi in cui interviene il tempo sono sempre giudizi su *eventi simultanei*. Se io per esempio dico: «Quel treno giunge qui alle ore 7», ciò equivale a dire, in pratica: «Il posizionamento della lancetta del mio orologio sul 7 e l'arrivo del treno sono eventi simultanei.»[3]

Sembrerebbe che per superare tutte le difficoltà connesse alla definizione di «tempo» basti sostituire, in luogo della parola «tempo», il «posizionamento della lancetta del mio orologio». Una tale definizione è soddisfacente quando si tratti di definire un tempo soltanto per il luogo ove l'orologio si trova, ma non lo è più quando si tratti di correlare nel tempo eventi che si verificano in luoghi differenti, oppure – il che è lo stesso – di stabilire i tempi di eventi che si producono in luoghi lontani dall'orologio.

Noi potremmo, certo, accontentarci di determinazioni di tempo effettuate nel modo seguente: un osservatore, munito di orologio e situato nell'origine delle coordinate, associa ad ogni segnale luminoso che gli giunge attraverso lo spazio vuoto, e che testimonia di un evento da valutare, la corrispondente posizione delle lancette dell'orologio. Ma un tale ordinamento ha lo svantaggio di non essere indipendente dalla posizione di questo osservatore, come noi sappiamo dall'esperienza. A una assai più pratica determinazione giungiamo per mezzo della seguente considerazione.

Supponiamo che nel punto A dello spazio sia stato collocato un orologio: in A, un osservatore può effettuare determinazioni di tempo, per eventi che si verifichino nelle immediate vicinanze del punto, controllando le posizioni delle lancette dell'orologio negli istanti stessi in cui quegli eventi si producono. Parimenti, un osservatore che si trovi nel punto B e che dispone di un orologio – e qui diciamo «strutturalmente identico al precedente» – potrà stabi-

[3] Non tratteremo qui l'inesattezza inerente al concetto di simultaneità di due eventi che si verificano (approssimativamente) nello stesso luogo, e che può essere solo rimossa per astrazione.

lire i valori di tempo di eventi nell'immediato intorno di B. Ma non è possibile, senza ulteriori convenzioni, confrontare rispetto al tempo un evento in A e un evento in B; noi abbiamo finora definito un «tempo A» e un «tempo B», ma non un tempo comune ad A e B. Per questo occorre stabilire, *per definizione*, che il «tempo» che la luce impiega nel percorso da A a B è uguale al «tempo» che essa impiega nel percorso da B ad A. Supponiamo cioè che un raggio di luce parta da A, diretto verso B, al «tempo A» t_A, venga, in B, riflesso verso A al «tempo B» t_B, e giunga nuovamente in A al «tempo A» t'_A. Per definizione, i due orologi sono sincronizzati quando

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Noi supponiamo che questa definizione di sincronismo sia libera da contraddizioni e applicabile a un numero qualsivoglia di punti, e che siano universalmente valide le seguenti relazioni:

1) Se l'orologio in B è sincronizzato con l'orologio in A, l'orologio in A è sincronizzato con l'orologio in B.

2) Se l'orologio in A è sincronizzato sia con l'orologio in B che con l'orologio in C, sono sincronizzati tra loro anche gli orologi in B e in C.

Avendo così stabilito, grazie a esperimenti fisici ideali, che cosa si debba intendere con sistema di orologi stazionari, disposti in luoghi diversi e sincronizzati tra loro, abbiamo evidentemente dato una definizione di «simultaneità» e di «tempo». Il «tempo» di un evento è quello indicato, simultaneamente al prodursi dell'evento stesso, da un orologio stazionario situato nel luogo dell'evento e sincronizzato, per ogni determinazione temporale, con un ben preciso orologio stazionario.

Supporremo ancora, in conformità con i risultati dell'esperienza, che la quantità

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = c$$

sia una costante universale, la velocità della luce nello spazio vuoto.

È essenziale l'aver definito il tempo per mezzo di orologi stazionari nel sistema stazionario; e poiché il tempo ora definito è appropriato a tale sistema, lo chiameremo «il tempo del sistema stazionario».

2. *Relatività di lunghezze e tempi*

Le riflessioni seguenti si basano sul principio di relatività e sul principio della costanza della velocità della luce, definiti come segue:

1. Le leggi secondo cui evolvono gli stati di un sistema fisico sono indipendenti dal fatto che questi cambiamenti vengano riferiti all'uno, piuttosto che all'altro, di due sistemi di coordinate in moto relativo traslatorio uniforme.

2. Nel sistema di coordinate «stazionario», ogni raggio di luce, non importa se emesso da un corpo in quiete o da un corpo in movimento, si muove con la determinata velocità c. Ed è

$$\text{velocità} = \frac{\text{percorso della luce}}{\text{intervallo di tempo}},$$

ove «intervallo di tempo» è da intendere nel senso della definizione del paragrafo 1.

Sia data un'asta rigida stazionaria, la cui lunghezza, misurata con un regolo campione parimenti stazionario, sia uguale a l. Immaginiamo ora l'asta allineata all'asse delle x del sistema di coordinate stazionario, e supponiamo che ad essa venga impresso un moto di traslazione uniforme di velocità v, parallelamente all'asse delle x e nel verso delle x crescenti. Volendo determinare la lunghezza dell'asta *in movimento* possiamo immaginare di agire nei due modi seguenti:

a) L'osservatore si muove insieme al regolo campione e all'asta e misura la lunghezza di questa direttamente, e cioè giustapponendo ad essa il regolo, così come farebbe se rispetto all'una e all'altro egli si trovasse in quiete.

b) L'osservatore accerta, per mezzo di orologi stazionari dislocati nel sistema stazionario e sincronizzati tra loro nel modo indicato nel paragrafo 1, in quali punti del sistema stesso si trovano, in un istante dato, le estremità dell'asta da misurare. La distanza di quei due punti, misurata con il solito regolo campione, in questo caso in quiete, è ancora una lunghezza definibile come «lunghezza dell'asta».

Secondo il principio di relatività, il valore che si ricava mediante l'operazione (*a*), che chiameremo «lunghezza dell'asta nel sistema in moto», è uguale alla lunghezza l dell'asta stazionaria.

Diverso da l è il valore che si determina, in base a entrambi i nostri princìpi, per mezzo dell'operazione (*b*), e che chiameremo «lunghezza dell'asta in moto nel sistema stazionario».

La cinematica usuale ipotizza implicitamente che i valori di lunghezza determinati con queste due operazioni siano esattamente uguali fra loro, o, in altre parole, che un corpo rigido in movimento al tempo t sia, per quanto riguarda la geometria, in tutto e per tutto rappresentato dallo stesso corpo in quiete in una data posizione.

Immaginiamo che alle estremità A e B dell'asta siano stati collocati orologi sincronizzati con quelli del sistema stazionario, e cioè tali che le loro indicazioni corrispondano, ad ogni istante, al «tempo del sistema stazionario» nei luoghi ove essi si trovano; questi orologi sono allora «sincronizzati nel sistema stazionario».

Immaginiamo inoltre che presso ciascun orologio mobile vi sia un osservatore solidale con esso, e che questi osservatori applichino ai due orologi il criterio di sincronizzazione dato nel paragrafo 1. Un raggio di luce parta da A al tempo[4] t_A, venga riflesso in B al tempo t_B e ritorni in A al tempo t'_A. In base al principio della costanza della velocità della luce troviamo

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c-v} \quad \text{e} \quad t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c+v}$$

ove r_{AB} indica la lunghezza dell'asta mobile misurata nel sistema stazionario. Osservatori in moto insieme con l'asta troverebbero allora che i due orologi non sono sincronizzati, laddove osservatori nel sistema stazionario dichiarerebbero che essi lo sono.

Vediamo dunque che al concetto di simultaneità non possiamo attribuire alcun significato *assoluto*, e che eventi giudicati simul-

[4] La parola «tempo» significa qui sia «tempo del sistema stazionario» sia «indicazione delle lancette dell'orologio in moto nel punto considerato».

tanei in un certo sistema di coordinate, in un altro sistema che sia in moto rispetto ad esso non son più da considerare tali.

3. *Teoria della trasformazione delle coordinate e del tempo nel passaggio da un sistema stazionario a un sistema che si muova, relativamente ad esso, di moto traslatorio uniforme*

Siano dati, nello spazio «stazionario», due sistemi di coordinate, e cioè due sistemi ciascuno dei quali è costituito di tre linee materiali rigide, tra loro perpendicolari, uscenti da un punto. Gli assi X dei due sistemi coincidano, e i rispettivi assi Y e Z siano paralleli. Ogni sistema sia corredato di un regolo campione e di un certo numero di orologi; i due regoli, come pure gli orologi dei due sistemi, siano esattamente uguali.

Supponiamo di imprimere all'origine di uno di tali sistemi (k) una velocità v (costante) nella direzione delle x crescenti dell'altro sistema (K), e che tale velocità si comunichi pure agli assi coordinati, al relativo regolo campione e agli orologi. Ad ogni istante t del sistema stazionario K corrisponde allora una determinata posizione degli assi del sistema in moto; per ragioni di simmetria, siamo autorizzati a supporre che il movimento di k possa esser tale che all'istante t (con «t» viene sempre designato il tempo del sistema stazionario) gli assi del sistema in moto siano paralleli agli assi del sistema stazionario.

Immaginiamo ora che lo spazio venga misurato tanto dal sistema stazionario K, per mezzo del regolo campione stazionario, quanto dal sistema mobile k, per mezzo del regolo campione solidale con esso: siano x, y, z e ξ, η, ζ, rispettivamente, le coordinate che si ottengono in tal modo. Il tempo t del sistema stazionario venga determinato, per tutti i punti di esso in cui si trovino orologi stazionari, per mezzo di segnali luminosi (§ 1); con lo stesso metodo si misurerà il tempo τ del sistema in moto per tutti i punti di esso in cui si trovino orologi in quiete rispetto al sistema stesso.

Ad ogni sistema di valori x, y, z, t, che compiutamente determina, nel sistema stazionario, luogo e tempo di un evento, corrisponde un sistema di valori ξ, η, ζ, τ che determina quell'evento nel sistema k; abbiamo così il problema di trovare il sistema di equazioni che collegano tra loro queste quantità.

In primo luogo è chiaro che le equazioni devono essere *lineari*, a cagione delle proprietà di omogeneità attribuite allo spazio e al tempo.

Se poniamo $x' = x - vt$, è chiaro che a un punto in quiete nel sistema k compete una ben determinata terna di valori x', y, z indipendenti dal tempo. Definiamo dapprima τ in funzione di x', y, z e t. A questo scopo dobbiamo esprimere in equazioni il fatto che τ non è altro che l'insieme delle indicazioni degli orologi in quiete nel sistema k (previamente sincronizzati secondo la regola data al § 1).

Dall'origine del sistema k, all'istante τ_0, venga emesso un raggio di luce lungo l'asse delle X, verso x'; in x' questo raggio sia poi riflesso, al tempo τ_1, in direzione dell'origine delle coordinate, dove giungerà al tempo τ_2. Dovrà allora essere

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1,$$

ovvero, introducendo gli argomenti della funzione τ e applicando il principio della costanza della velocità della luce nel sistema stazionario,

$$\frac{1}{2}\left[\tau\left(0, 0, 0, t\right) + \tau\left(0, 0, 0, t + \frac{x'}{c-v} + \frac{x'}{c+v}\right)\right] =$$

$$= \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{c-v}\right).$$

Di qui, se si sceglie x' infinitamente piccolo, discende che

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right)\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{c-v}\frac{\partial \tau}{\partial t},$$

ossia

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{c^2 - v^2}\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$

È da notare che, invece dell'origine delle coordinate, avremmo potuto scegliere, come punto di partenza del raggio di luce, qualsiasi altro punto, e che quindi l'equazione ottenuta vale per qualsiasi valore di x', y, z.

Se si tiene conto, per quanto riguarda gli assi Y e Z, del fatto che la luce, vista dal sistema stazionario, si propaga sempre lungo tali assi con velocità $\sqrt{c^2-v^2}$, allora una considerazione analoga ci dà

$$\frac{\partial \tau}{\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial \tau}{\partial z}=0.$$

Da queste equazioni, poiché y è funzione *lineare*, discende che

$$\tau=a\left(t-\frac{v}{c^2-v^2}x'\right),$$

ove a è una funzione, per ora incognita, $\varphi(v)$, e si è ammesso, per brevità, che nel punto iniziale di k, per $\tau=0$, sia $t=0$.

Grazie a questo risultato è agevole dedurre le quantità ξ, η, ζ. Basta infatti esprimere in equazioni il fatto che la luce, anche misurata nel sistema in moto, si propaga con velocità c (come esige il principio della costanza della velocità della luce, in una con il principio di relatività). Per un raggio di luce emesso al tempo $\tau=0$ nella direzione delle ξ crescenti è

$$\xi=c\tau, \quad \text{ossia} \quad \xi=ac\left(t-\frac{v}{c^2-v^2}x'\right).$$

Ora però il raggio di luce si muove, relativamente all'origine di k, con velocità (misurata nel sistema stazionario) $c-v$, cosicché si ha

$$\frac{x'}{c-v}=t.$$

Sostituendo questo valore di t nell'espressione di ξ, otteniamo

$$\xi=a\frac{c^2}{c^2-v^2}x'.$$

Considerando raggi di luce propagantisi lungo gli altri due assi, si trova, analogamente, che

$$\eta=c\tau=ac\left(t-\frac{v}{c^2-v^2}x'\right), \quad \text{quando} \quad \frac{y}{\sqrt{c^2-v^2}}=t,\ x'=0,$$

cosicché

$$\eta=a\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}y,$$

e

$$\zeta=a\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}z.$$

Sostituendo a x' il suo valore otteniamo

$$\tau=\varphi(v)\beta(t-vx/c^2),$$
$$\xi=\varphi(v)\beta(x-vt),$$
$$\eta=\varphi(v)y,$$
$$\zeta=\varphi(v)z,$$

ove

$$\beta=1/\sqrt{1-v^2/c^2}$$

e $\varphi(v)$ è una funzione di v per ora incognita. Se non si fanno ipotesi sulla posizione iniziale del sistema in movimento e sul punto di τ assunto come zero, occorre aggiungere al secondo membro di ciascuna di queste equazioni una costante additiva.

Dobbiamo dimostrare, ora, che ogni raggio di luce, misurato nel sistema in moto, si propaga con velocità c, se, come abbiamo ammesso, è c la velocità di propagazione nel sistema stazionario: infatti, la compatibilità dei due princìpi, quello della costanza della velocità della luce e quello di relatività, non è stata ancora provata.

All'istante $t=\tau=0$, quando l'origine delle coordinate è comune per i due sistemi, venga emessa, da tale origine, un'onda sferica propagantesi con velocità c nel sistema K. Se (x, y, z) è un punto raggiunto dall'onda, si ha

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2.$$

Di qui, utilizzando le nostre equazioni di trasformazione, otteniamo, con un semplice calcolo, la relazione trasformata

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=c^2\tau^2.$$

L'onda considerata è dunque, anche considerata nel sistema in moto, un'onda sferica con velocità di propagazione c. Ciò mostra che i due princìpi fondamentali sono tra loro compatibili.[5]

Nelle equazioni di trasformazione qui sviluppate interviene una funzione incognita φ di v, che ci proponiamo di determinare.

Introduciamo, a questo scopo, un terzo sistema di coordinate K' il quale, relativamente al sistema k, si muova di moto traslatorio parallelamente all'asse X, così che l'origine delle coordinate di k si muova sull'asse X con velocità $-v$. Supponiamo che all'istante $t=0$ le tre origini coincidano e che per $t=x=y=z=0$ sia nullo anche il tempo t' del sistema K'. Dette x', y', z' le coordinate misurate nel sistema K', con una duplice applicazione delle nostre equazioni di trasformazione otteniamo

$$\begin{aligned} t' &= \varphi(-v)\beta(-v)(\tau+v\xi/c^2) &&= \varphi(v)\varphi(-v)t,\\ x' &= \varphi(-v)\beta(-v)(\xi+v\tau) &&= \varphi(v)\varphi(-v)x,\\ y' &= \varphi(-v)\eta &&= \varphi(v)\varphi(-v)y,\\ z' &= \varphi(-v)\xi &&= \varphi(v)\varphi(-v)z. \end{aligned}$$

Poiché le relazioni fra x', y', z' e x, y, z non contengono il tempo t, i sistemi K e K' sono in quiete l'uno rispetto all'altro, ed è chiaro che la trasformazione da K a K' deve essere la trasformazione identica. Pertanto

$$\varphi(v)\varphi(-v)=1.$$

Chiediamoci ora quale sia il significato di $\varphi(v)$. Per questo concentriamo la nostra attenzione su quella parte dell'asse Y del sistema k che è compresa tra i punti ($\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$) e ($\xi=0$, $\eta=l$, $\zeta=0$). Essa è, relativamente al sistema K, un'asta rigida

[5] È più semplice dedurre le equazioni della trasformazione di Lorentz direttamente, in base al fatto che, grazie a quelle equazioni, la relazione $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=c^2\tau^2$ implica l'altra $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$. [Annotazione di Einstein posteriore al 1905.]

che si muove con velocità v perpendicolarmente al proprio asse. Le sue estremità hanno, in K, rispettivamente coordinate

$$x_1=vt,\quad y_1=\frac{l}{\varphi(v)},\quad z_1=0 \quad \text{e} \quad x_2=vt,\quad y_2=0,\quad z_2=0.$$

La lunghezza dell'asta, misurata in K, è dunque $l/\varphi(v)$, il che ci fornisce il significato della funzione φ. Per ragioni di simmetria è ora evidente che, misurata nel sistema stazionario, la lunghezza di una data asta che si muova perpendicolarmente al proprio asse dipende solo dalla velocità e non dalla direzione e dal senso del movimento. Di conseguenza essa non cambia se si scambiano v e $-v$. Cosicché

$$l/\varphi(v)=l/\varphi(-v),$$

ossia

$$\varphi(v)=\varphi(-v).$$

Da questa relazione e da quella dedotta più sopra si deduce che $\varphi(v)=1$, cosicché le equazioni di trasformazione trovate diventano

$$\begin{aligned} \tau &= \beta(t-vx/c^2),\\ \xi &= \beta(x-vt),\\ \eta &= y,\\ \zeta &= z, \end{aligned}$$

ove

$$\beta=1/\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

4. *Significato fisico delle equazioni ottenute a proposito di corpi rigidi e orologi in movimento*

Consideriamo una sfera rigida[6] di raggio R, in quiete relativamente al sistema mobile k e centrata nell'origine delle coordinate. L'equazione della superficie di questa sfera, che rispetto al sistema K è in moto con velocità v, è

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=R^2.$$

[6] Cioè un corpo che, esaminato in quiete, abbia forma sferica.

Nelle x, y, z, l'equazione di questa superficie, al tempo $t=0$, è

$$\frac{x^2}{(\sqrt{1-v^2/c^2})^2}+y^2+z^2=R^2.$$

Un corpo rigido che, misurato in stato di quiete, ha la forma di una sfera, in stato di moto – considerato dal sistema stazionario – ha dunque la forma di un ellissoide di rotazione di assi

$$R\sqrt{1-v^2/c^2}, \quad R, \quad R.$$

Così, mentre le dimensioni Y e Z di una sfera (e dunque di un corpo rigido di forma qualunque) non appaiono modificate dal movimento, la dimensione X risulta accorciata nel rapporto $1:\sqrt{1-v^2/c^2}$, il che significa che l'accorciamento è tanto maggiore quanto più grande è il valore di v. Per $v=c$, tutti i corpi in moto – considerati dal sistema «stazionario» – risultano figure appiattite. Per velocità superiori a quella della luce le nostre considerazioni perdono significato; vedremo comunque più avanti che nella nostra teoria il ruolo della velocità della luce, in senso fisico, è quello di una velocità infinitamente grande.

È chiaro che uguali risultati valgono per corpi in quiete nel sistema «stazionario» quando vengano considerati da un sistema in moto uniforme.

Immaginiamo inoltre che uno degli orologi predisposti a segnare il tempo t, quando siano in quiete rispetto al sistema stazionario, e il tempo τ, quando siano in quiete relativamente al sistema in moto, venga collocato nell'origine delle coordinate di k e regolato in modo da segnare il tempo τ. Quale ritmo avrà, codesto orologio, nel riferimento stazionario?

Tra le grandezze x, t e τ che si riferiscono alla posizione dell'orologio, valgono evidentemente le relazioni

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(t-vx/c^2) \quad \text{e} \quad x=vt.$$

È dunque
$$\tau=t\sqrt{1-v^2/c^2}=t-(1-\sqrt{1-v^2/c^2})t,$$

da cui segue che l'orologio (considerato nel sistema stazionario) ritarda, ogni secondo, di $(1-\sqrt{1-v^2/c^2})$ secondi, ovvero (a meno di quantità infinitesime del quart'ordine o di ordine superiore) di $\frac{1}{2}v^2/c^2$ secondi.

Ciò ha una conseguenza singolare. Supponiamo di avere, nei punti A e B di K, orologi stazionari sincronizzati rispetto al sistema stazionario. Immaginiamo poi di spostare l'orologio residente in A verso il punto B, lungo la congiungente AB, con velocità v: al suo arrivo in B, questo orologio non è più sincronizzato con quello residente in B, ma rispetto ad esso ritarda di $\frac{1}{2}tv^2/c^2$ secondi (a meno infinitesimi del quart'ordine o di ordine superiore), se t è il tempo impiegato per passare da A a B.

Si vede subito che tale conclusione si applica anche al caso in cui l'orologio si muove da A e B lungo una linea poligonale qualsiasi, e anche quando i punti A e B coincidono.

Supponendo che quel che si è detto per una spezzata valga anche per una curva regolare, si può affermare quanto segue: dati, in A, due orologi sincronizzati, se uno di essi viene spostato a velocità costante lungo una curva chiusa, fino a ritornare dopo t secondi al punto di partenza, allora questo orologio, arrivando in A, sarà in ritardo di $tv^2/2c^2$ secondi rispetto a quello rimasto in quiete. Se ne conclude che all'equatore un orologio sarà più lento,[7] anche se in misura impercettibile, di un orologio identicamente costruito e sottoposto a uguali condizioni, che si trovi a un polo.

5. *Composizione delle velocità*

Nel sistema k, in moto lungo l'asse X del sistema K con velocità v, si muova un punto secondo le equazioni:

$$\xi=w_\xi\tau, \quad \eta=w_\eta\tau, \quad \zeta=0$$

ove w_ξ e w_η indicano delle costanti.

[7] Non però un «orologio a pendolo», che – considerato fisicamente – è un sistema cui appartiene la Terra; cioè dovrebbe venir escluso. [Osservazione di Einstein posteriore al 1905.]

Si ricerca il moto del punto relativamente al sistema K. Se nelle precedenti equazioni si introducono, mediante le relazioni di trasformazione del paragrafo 3, le grandezze x, y, z, t, si ottiene

$$x=\frac{w_\xi+v}{1+vw_\xi/c^2}t,$$

$$y=\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+vw_\xi/c^2}w_\eta t,$$

$$z=0.$$

Secondo la nostra teoria, la regola del parallelogramma per la composizione delle velocità vale solo in prima approssimazione. Poniamo

$$U^2=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

$$w^2=w_\xi^2+w_\eta^2$$

e

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{w_y}{w_x},$$

cosicché α è da considerare come l'angolo tra le velocità v e w. Con semplice calcolo si deduce

$$U=\frac{\sqrt{(v^2+w^2+2vw\cos\alpha)-(\sin\alpha\cdot vw/c)^2}}{1+\cos\alpha\cdot vw/c^2}.$$

È degno di nota il fatto che v e w entrano in maniera simmetrica nell'espressione della velocità risultante. Se anche w ha la direzione dell'asse X, si ha

$$U=\frac{v+w}{1+vw/c^2}.$$

Questa relazione mostra come, sommando due velocità minori di c, si ottenga sempre una velocità minore di c. Se si pone infatti $v=c-\varkappa$, $w=c-\lambda$, con $\varkappa$ e λ positive e minori di c, si ha

$$U=c\frac{2c-\varkappa-\lambda}{2c-\varkappa-\lambda+\varkappa\lambda/c}<c.$$

Dalla formula di composizione delle velocità discende, fra l'altro, che c resta inalterata qualora la si componga con una velocità inferiore a quella della luce. Si ha infatti

$$U=\frac{c+w}{1+w/c}=c.$$

Nel caso di velocità v e w parallele avremmo anche potuto ottenere la formula di U componendo due trasformazioni nel modo indicato nel paragrafo 3. Accanto ai sistemi K e k che compaiono in quel paragrafo introduciamo un terzo sistema di coordinate, k', che si muova parallelamente a k, e la cui origine si muova sull'asse X con velocità w; le relazioni che così si ottengono tra x, y, z, t e le corrispondenti quantità di k' si distinguono da quelle trovate nel paragrafo 3 solo in quanto, in luogo di «v», interviene l'espressione

$$\frac{v+w}{1+vw/c^2}.$$

Si vede allora che queste trasformazioni parallele formano necessariamente un gruppo.

Avendo dedotto le leggi necessarie della teoria cinematica corrispondente ai nostri due princìpi, passiamo a mostrarne l'applicazione all'elettrodinamica.

Questo risultato relativistico ha delle implicazioni molto profonde anche per il modo in cui percepiamo la realtà che ci circonda. Data la finitezza della velocità della luce, quando osserviamo eventi che non coincidono con il "qui" del campo visivo, a rigore noi osserviamo eventi passati, fatto che risulta ancora più evidente nel caso di eventi astronomici: la luce che percepiamo nel telescopio puntato sulla galassia Andromeda è stata emessa due milioni di anni fa. In realtà dunque, noi percepiamo solo il presente che è "qui", cioè i vari successori causali di eventi che sono accaduti in tempi diversi e a distanze diverse, e che hanno in comune solo il fatto di inviare messaggi postumi che colpiscono simultaneamente la nostra retina. Così come non esiste un "qui" senza un "ora", non esiste un "là" senza un "allora".

Dato che il senso comune tende però a considerare l'esistenza simultanea di eventi a distanza (il presente cosmico) come del tutto incontrovertibile, è importante cercare di fornire una spiegazione del sorgere di questa intuizione. In tal modo, possiamo assicurare una coesistenza pacifica tra la versione fisica della simultaneità e quella psicologico-intuitiva del senso comune, un po' come i copernicani avevano il compito di spiegare, dopo avere introdotto la loro rivoluzionaria concezione, perché la Terra si muova senza che noi ce ne accorgiamo.

La spiegazione che andiamo cercando fa riferimento sia al fatto che la velocità della luce (300.000 km/sec) è molto più grande della velocità dei segnali fisici non elettromagnetici, sia ai limiti naturali dati dalla capacità di discriminazione del sistema nervoso tra due eventi temporalmente molto vicini. A causa di questi due fattori, l'essere umano si è evoluto considerando la realtà spaziale attorno a sé come qualcosa che esiste simultaneamente alla sua esperienza cosciente. Considerando il limite approssimativo di 1/100 di secondo come indicante la soglia al di sotto della quale il sistema visivo umano non può discriminare visivamente due eventi come temporalmente successivi, si calcola facilmente che la luce nel tempo corrispondente percorre circa 3.000 km. Come conseguenza del principio limite della velocità della luce, un essere umano non può che considerare ogni evento all'interno di una sfera di tal raggio come *praticamente simultaneo*, dato che la luce emessa da uno qualsiasi di tali eventi raggiunge la retina in un intervallo che è al di sotto della soglia di distinguibilità. Supponendo che non esista una "coscienza istantanea", ma che ogni esperienza cosciente abbia invece una durata non infinitesima o un certo spessore temporale,[12] il pregiudizio evolutivo per cui tendiamo a identificare ciò che è "reale ora" con ciò che è "visto ora" troverebbe una sua spiegazione naturale.

Nel tradizionale spazio euclideo tridimensionale la distanza tra due punti è un invariante rispetto a trasformazioni degli assi, quali traslazioni e rotazioni. Il quadrato della distanza rispetto a due punti P di coordinate x, y, z e P' di coordinate x', y', z' è espresso dalla relazione:

$s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ dove $\Delta x = (x' - x)$, $\Delta y = (y' - y)$, $\Delta z = (z' - z)$.

In caso di punti "infinitamente vicini" si usa un'espressione analoga fra i differenziali:

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

La distanza è espressa da un numero reale non negativo; essa è uguale a zero solo per punti coincidenti.

Nello spaziotempo quadridimensionale di Minkowski si ha un invariante analogo alla distanza dello spazio ordinario, chiamato intervallo. I punti dello spazio di Minkowski sono detti eventi. Il quadrato dell'intervallo fra due eventi P di coordinate ct, x, y, z e P' di coordinate ct', x', y', z' è dato dalla relazione:

$s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ dove $\Delta t = (t' - t)$, $\Delta x = (x' - x)$, $\Delta y = (y' - y)$, $\Delta z = (z' - z)$.

L'espressione con i differenziali è:

$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$.

Il quadrato dell'intervallo può essere positivo, nullo o negativo: in quest'ultimo caso l'intervallo $s = \sqrt{s^2}$ è dato da un numero immaginario.

CLASSIFICAZIONE DEGLI INTERVALLI

Nello spazio tridimensionale euclideo esiste un invariante rispetto alle trasformazioni di coordinate, sia alle traslazioni che alle rotazioni: la distanza tra due punti, S_{12}, il cui quadrato può essere espresso dalla relazione $S_{12}^2 = X_{12}^2 + Y_{12}^2 + Z_{12}^2$; questo non è altro che l'applicazione del teorema di Pitagora dove con i pedici 1,2 si indica la differenza delle coordinate dal punto 1 al punto 2.
Nello spazio quadridimensionale pseudoeuclideo di Minkowski esiste una relazione analoga tra le coordinate:
$s_{12}^2 = c^2t^2 - x_{12}^2 - y_{12}^2 - z_{12}^2$; la grandezza s_{12}, invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz, è chiamata intervallo. Si possono dare tre casi:

1) $s_{12}^2 > 0$, 2) $s_{12}^2 < 0$, 3) $s_{12}^2 = 0$.

1) In questo caso gli intervalli sono detti del *genere tempo*. In ogni SRI (sistema di riferimento inerziale) l'evento 1 sarà sempre precedente l'evento 2. Per quanto riguarda le distanze spaziali, esisterà un SRI in cui i due eventi saranno nello stesso luogo. Poiché l'ordine temporale – pur cambiando la misura del tempo in diversi SRI – non cambia, gli eventi con questo intervallo possono essere legati da un rapporto di causa/effetto. Se consideriamo un evento rappresentato dal punto O e il cono di luce che ha origine in quel punto, i punti interni a tale cono rappresenteranno eventi collocati nel futuro assoluto o nel passato assoluto rispetto ad O.
2) Intervalli del *genere spazio*. Per questi eventi è possibile trovare un SRI in cui sono simultanei e altri nei quali l'ordine temporale viene invertito. Tra eventi del genere spazio non può esistere relazione causale (perché ciò possa avvenire occorrerebbero interazioni propagantisi a velocità maggiori di *c*). Considerato, come sopra, un evento rappresentato da un punto O, gli eventi che hanno rispetto ad esso un intervallo del genere spazio si trovano esternamente al cono di luce: essi non coincideranno spazialmente con O in nessun SRI, si troveranno rispetto ad esso in una lontananza assoluta.
3) Intervalli del *genere luce*. Essi connettono i punti attraversati da un raggio luminoso; si trovano sulle generatrici del cono di luce. Le linee oblique, bisettrici dei quadranti, rappresentano le linee d'universo di due raggi luminosi propagantisi lungo l'asse x in versi opposti.

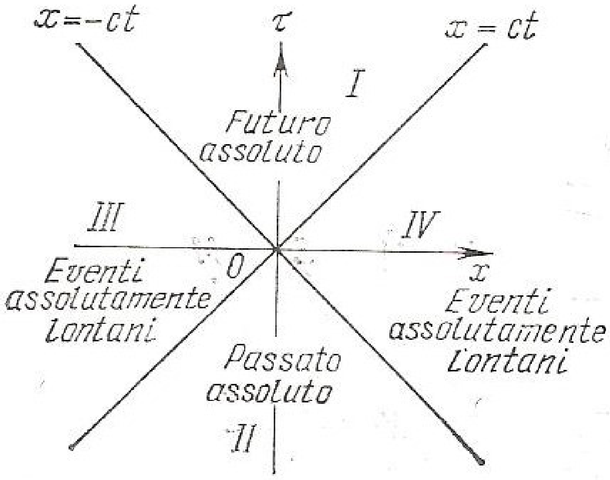


Fig. 4.4. L'intersezione del cono spazio-temporale col piano (x, τ). Il punto O rappresenta l'evento 1. Tutti gli eventi situati nei quadranti III e IV rappresentano eventi assolutamente lontani rispetto all'evento O; gli eventi situati nel quadrante I rappresentano il futuro assoluto, mentre quelli situati nel quadrante II il passato assoluto.

Spazio di Minkowski M^2 in cui si rappresentano una coordinata spaziale e una temporale

Esaminiamo ora un moto arbitrario di una particella in questo riferimento. Il moto di questa particella è rappresentato dalla linea d'universo $x = x(\tau)$ nel piano (x, τ), come appare nella fig. 4.2.

L'inclinazione della linea d'universo rispetto all'asse τ in ogni punto dato è determinata dalla derivata $dx/d\tau$ in quel punto. Infatti (vedi la fig. 4.2),

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} = \frac{v}{c}. \tag{4.16}$$

Così, l'angolo d'inclinazione è determinato dalla seguente equazione:

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{v}{c} = \operatorname{arctg} \beta, \tag{4.17}$$

dove $\beta = v/c$ e v è la velocità istantanea del punto (corpo). Visto che $\beta < 1$ sempre, l'angolo ϑ non può superare i 45° per ogni corpo in moto. La linea d'universo dei raggi di luce sarà rappresentata dalla bisettrice dell'angolo fra gli assi coordinati.

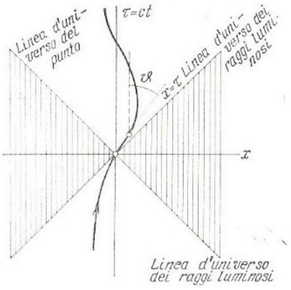


Fig. 4.2. Il sistema di coordinate reali x, $\tau = ct$. La posizione della particella ad un istante dato viene determinata da un punto in questo piano. Al moto della particella corrisponde in questo piano una curva, detta linea d'universo di un punto. Le linee d'universo di punti immobili sono rette parallele all'asse τ. La linea d'universo dei raggi luminosi è la bisettrice dell'angolo fra gli assi coordinati. Nel caso di moto con velocità variabile l'angolo formato dalla tangente alla linea d'universo e l'asse τ è definito dalla relazione $\vartheta = \operatorname{arctg}(v/c)$, dove v è la velocità istantanea di una particella.

Abbiamo visto nel § 2.9 che in seguito alle trasformazioni di Lorentz gli assi τ', x' si ottengono dagli assi τ, x, se questi ultimi vengono spostati, « a forbice », verso la bisettrice, la linea d'universo dei raggi luminosi. Nella fig. 4.3, *a*, in cui accanto agli assi τ, x sono tracciati gli assi τ', x', si vede graficamente la relatività della **simultaneità**. Nel riferimento K' tutti gli eventi che giacciono sull'asse x', o sulla retta $\tau' =$ costante, sono simultanei. In termini

116

geometrici, tutte queste rette, parallele all'asse x', rappresentano le linee di simultaneità nel riferimento K'.

Consideriamo i due eventi A_1 e A_2 situati sull'asse x' (ambedue questi eventi avvengono simultaneamente nel riferimento K' all'istante $t' = 0$). Per trovare gli istanti del tempo ai quali questi due eventi avverranno nel riferimento K, bisogna « proiettare » questi eventi sull'asse τ, tracciando rette parallele all'asse x, poiché nel riferimento K gli eventi, che giacciono sulle rette $\tau =$ costante

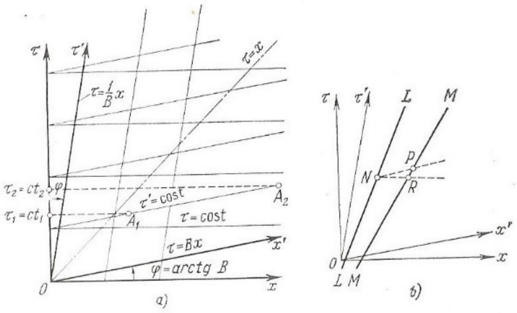


Fig. 4.3. *a*) La trasformazione di Lorentz si riduce alla rotazione degli assi x e τ dell'angolo $\varphi = \operatorname{arctg} B$ intorno all'origine delle coordinate verso la bisettrice dell'angolo fra gli assi coordinati e le loro nuove posizioni x', τ'. Le rette $x' =$ costante sono parallele ora all'asse $O\tau'$, mentre le rette $\tau' =$ costante sono parallele all'asse Ox' (siamo passati al sistema di assi coordinati rettilinei obliqui). La relatività della simultaneità è chiaramente visibile: gli eventi A_1 e A_2, simultanei nel riferimento K' (giacenti sulla retta $\tau' =$ costante) non sono simultanei nel riferimento K (per trovare i rispettivi istanti nel riferimento K, bisogna proiettarli sull'asse mediante rette parallele all'asse x). *b*) Qui sono tracciate due linee d'universo di que corpi (LL e MM). La relatività della distanza tra corpi in moto è visibile molto bene. Per trovare la distanza tra di loro, bisogna determinare le coordinate di questi corpi, ma necessariamente in modo simultaneo. Sia uno dei corpi situato nel punto N. Allora in termini del riferimento K nel medesimo istante il secondo corpo si trova nel punto R. Ma in termini del riferimento K' il secondo corpo nello stesso istante si trova nel punto P. I segmenti NR e NP che corrispondono alla distanza tra i corpi hanno differenti lunghezze.

(fig. 4.3, *a*), sono simultanei. Vediamo che nel riferimento K questi eventi avvengono ad istanti differenti di tempo t_1 e t_2. Ovviamente, questa è solo un'illustrazione geometrica della relatività della sincronizzazione degli orologi che abbiamo affrontato nel § 2.4.

Un risultato molto importante segue dalla fig. 4.3, *b*, in cui sono tracciate le linee d'universo di due corpi che si muovono uniformemente ma con velocità diverse. Per determinare la distanza tra

117

Tratto da V. A. Ugarov, *Teoria della relatività ristretta*

TEMPO E SPAZIO NEI SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI IN MOTO RELATIVO

Siano K e K’ due sistemi di riferimento e K’ si muova con velocità V nel verso positivo dell’asse X del sistema K. Poniamo β = $\frac{V}{c}$

Un regolo di lunghezza L’ sia in quiete nel sistema K’ e disposto parallelamente alla direzione del moto; la sua lunghezza misurata nel sistema K sarà allora L = L’$\sqrt{1-\beta^2}$, risulterà quindi contratto.

Due eventi avvengano nel sistema K’ nello stesso punto e a distanza di tempo τ’ l’uno dall’altro; l’intervallo temporale misurato in K varrà τ = $\frac{\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}}$, quindi si avrà una dilatazione dei tempi.

Nel sistema K’ i regoli si accorciano ed il tempo scorre più lentamente.